

Risa/Asir の開発

竹島 卓*

(株) 富士通研究所

(RECEIVED 2005/07/31 REVISED 2005/08/23)

概 要

The palindrome name “Risa/Asir” comes from an abbreviation of “Research Instrument for Symbolic Algebra”, a computer algebra system developed first at Fujitsu Laboratories, Ltd., and currently maintained by Risa/Asir Committers team. This paper is written in the hope of encouraging the future development of Japanese computer algebra activities in theory, systems and application, by reviewing the two decades of Risa/Asir.

1 序

Risa/Asir という回文名は「Research Instrument for Symbolic Algebra」に由来する。それは当初富士通研究所において開発され、現在は Risa/Asir Committers team¹⁾により維持され、日々発展しているオープンソースの計算機代数システム(いわゆる数式処理システム)である。本稿は、富士通での数式処理研究の所産として Risa/Asir が開発されるに至った経緯に焦点を当て、誕生前史および誕生後の歴史を明らかにし、今後の開発に示唆を与える。

2 Risa/Asir 開発の動機

Risa/Asir は数式処理システムである。「数式処理」とは「formula manipulation」の訳語で、津田塾大学の渡辺隼郎先生が命名した。わが国においては、より新しい「computer algebra」およびその訳語としての「計算機代数」よりも「数式処理」の用語が一般には親しまれて使用されている。「数式処理」や「formula manipulation」は「数式(=formula)」を人が紙と鉛筆で扱うように機械(計算機)で扱うことを意味しており、記号としての数式の取り扱いをイメージすれば「記号処理」の一種と考えることができる。他方、「計算機代数(=computer algebra)」とは、単なる記号としての数式よりも、数式がまさに数式として意味があるように、数学構造としての代数構造やその特徴量を、計算機を利用することによってうまく取り扱うことを目的とした技術を意味

*tak@jp.fujitsu.com

¹⁾現在の Risa/Asir は OpenXM の Contrib2 として提供されており、Risa/Asir committers は神戸大学のメンバーを中心とする OpneXM committers (<http://www.openxm.org/>) メンバーの大半と重複している。以後、本文では OpenXM Committers のみを引用する。

すると言える。「数式」の「処理」に力点を置く「数式処理システム」も、単に力づくで数式を取り扱うのではなく、代数的な構造に着目してその構造を利用するようにしなければ、理工学の研究や実践の現場で現われるような問題を処理することが困難であるため、「計算機代数」や「計算機代数システム」という用語の方が世界的には一般に広く使われている。

Risa/Asir は「計算機」で確実に実行可能な「代数計算」が実行できるようにして、数学研究や理工学の教育/研究で利用できることを目的として開発された。開発に携わった筆者達は、富士通という企業の中ではあったが、アカデミックな雰囲気の研究部署、国際情報社会科学研究所に所属しており、商品開発のベースとしてではなく、広い意味では計算機科学の、狭い意味では数理計算科学の、先行的かつ実験的研究の道具として、またそれ自身を研究の対象として開発することが許された。そのため、システムの開発に当っては「数式処理」の応用面よりも、大規模問題にも耐え得る効率的な代数的アルゴリズムの提供を目指し、ユーザインタフェースについては優先度を低くしている²⁾。

上述のような当初の目的から、主として多項式(整式)に対する演算については、初等的な代数演算から高等代数に応用される演算までが整備されている。有理式や初等超越関数を含む代数式に関する演算も、限定的ではあるが可能であり、導関数の計算も可能である。ただし、初等関数や根号、分数冪を含む式の簡約化については、ごく単純な場合を除いて提供されていないため、ユーザが個別に Asir でプログラムを書いて処理をする必要がある。代数演算以外にも、浮動小数点数による通常の数値演算と任意多倍長数値演算が可能であり、初等関数やその微分係数の数値計算を併用することができることは他の多くの数式処理システムと同様である。この多倍長数値演算については Pari のライブラリ³⁾を利用して計算している。グラフィックスは平面曲線の描画のみが提供されているが、その 2 変数代数曲線の描画性能は高く、研究者には重用されている。

上述のように解析的な演算に基づく式変形の操作には制約はあるが、教育的な応用としては、中学高校で教えられるヒューリスティックスとしての多項式の因数分解をはじめとする代数計算(整式の四則演算ができる範囲)を、システムティックな方法で確実に実行する方法として有効である。平面曲線の描画と初等関数の数値計算を利用することにより、微分とその応用(極大、極小、変曲点、制約最適問題)などへの教育にも適用が可能である。

工学的な応用に関しては、グレブナー基底を用いた多変数連立代数方程式系の解法を適用することで、ロボットの運動学方程式の解法他、多くの等式制約問題の解法への応用がある。

筆者が、データベース以後の計算機の新しい応用開拓の有力候補として、数値計算では実行困難な数理問題への解法としての数式処理の検討を考えていたとき、ICOT⁴⁾ 中期の実証プログラムの一つとして応募してはと、当時の上司 辻ヶ堂⁵⁾から示唆を受けて応募したところ、ICOT に採用された。これが 1985 年のことである。Risa/Asir の開発はまだ 4 年後であるが、ここに

²⁾Risa/Asir のインタフェースは GUI(Graphical User Interface) でなく、CUI(Command line User Interface) である。陰関数描画機能では GUI 機能を一部取り入れている。

³⁾Pari: Henri Cohen 他が開発の整数論の計算のための C Library . <http://pari.math.u-bordeaux.fr/>

⁴⁾(財) 新世代コンピュータ技術開発機構。

⁵⁾辻ヶ堂 信。国際研 研究管理統括部長。のち工学院大学教授。

Risa/Asir の誕生前史が始まった。

3 Risa/Asir 名前の由来

Risa は、富士通株式会社 国際情報社会科学研究所 (1990 年 3 月当時) 第一研究部第三研究室で、計算機代数 (数式処理) の研究の成果として、室長 竹島 卓⁶⁾、横山和弘⁷⁾、野呂正行⁸⁾ の 3 名の手によって誕生した。実際に C コードを書いたのは野呂である。

Risa の名前⁹⁾ が最初に世間に出たのは、1990 年 3 月 13 日 理化学研究所で当時毎年開催されていたシンポジウム「記号数式処理と先端的科学技術計算」での研究発表においてである。そのタイトルは、「数式処理システム risa(仮称) の現況—その 2」とあり、この時点ではまだ「仮称」が付いていた。1990 年 6 月 18–20 日に那須で開催されたソフトウェア学会の数式処理研究会では「仮称」のない risa として発表された。

命名したのは筆者である。それまでは数式処理の算法 (アルゴリズム) を断片的に試作した順に、「エンジン」、「エンジン 2 号」あるいは「Nor-Yokosyma」などと呼んでいた。Macsyma の開発者の一人 R. Fateman 教授が富士通を訪問された時、日本語の Yokosyma の意味は「evil mind」であるから、「Nor-Yokosyma」は「(neither Macsyma) nor evil mind」だと言ったら大笑いされた。この段階では「エンジン」はまだシステムとしての体裁を成しておらず、数式処理に必要とされる要素算法がばらばらに作成されていただけであった。

1989 年の夏、当時の国際研 小口所長¹⁰⁾ が、数式処理グループの研究ヒアリングをした折り、『この「エンジン 2 号」という名では外部に公言するのは問題がある、今後システムとしてまとめていくのなら、適切な名前を付けて公にし、責任を持って実行せよ。』と指示を受けた。これを受けて、「Research | Symbolic Algebra」の略称として「R|sa(発音はリサ)」という名前を案出した。ここで「| (縦棒)」は論理型言語 Prolog での記号式 (Prolog term) の接続 (concatenation) から取ったもので、「記号代数の研究」の意味であった。しかし、略称が意図としての「リサ」と発音してもらえないという不便があったので、「|」をローマ字「i」で置き換え、「Research Instrument for Symbolic Algebra」(記号代数のための研究道具) の略として「Risa」と呼ぶことにした。「Asir」は「Risa」の言語インターフェースとして、野呂が命名した。

「Risa/Asir」は筆者等を含めた日本人は、だいたい「リサ・アジュール」と呼ぶのが普通であるが、1992 年の ISSAC92 で野呂の発表 [4] を司会した Geddes 教授¹¹⁾ が「リサ・エイシャ」と聞こえる発音で紹介された。(「リサ・アジア」に近い発音をして、Asia を意識したのか、との問いを受けることもある。)

1990 年という年は、記号数式処理国際会議 (ISSAC90) が東京で (アジア地域では初めて) 開催

⁶⁾現 富士通研究所 IT コア研究所専任研究員。

⁷⁾現 立教大学理学部教授。

⁸⁾現 神戸大学理学部教授。

⁹⁾日本人は“L”と“R”の区別が付かないということから、英語圏ではポピュラーな女性の名前の“Lisa”と綴をまちがってはいないか? と気遣って下さる方もあるが、“Risa”が本名である。NHK 教育テレビの英会話を担当されていた Risa Stegmayer さんという方もいらっしゃる。(日本名は「りさこ」さんだということだが、そのローマ字表記では“Risa”とされている。)

¹⁰⁾小口 文一 富士通研究所社長 (当時)。国際情報社会科学研究所 所長を兼務。

¹¹⁾K. O. Geddes. Waterloo 大学教授, Maple の開発者のひとり。

された年で、富士通の数式処理グループも開催の事務局の一員として、また発表者としてその準備に忙しくしていた。この頃は Risa は一般に公開されていたわけではなく、富士通グループの計算機代数(数式処理)の基礎研究の成果として、また、それ自身が計算機代数の算法(アルゴリズム)の研究開発の道具として、富士通内部で利用される他は、数式処理研究者の間でも限られた利用であった。Risa という名前を付けてからは、多くの支援者を得ることができ、それらの人々の協力を受けて今日に至っている。

4 富士通で数式処理研究を開始

富士通の数式処理グループが数式処理の研究を始めた契機は、1985年に富士通が ICOT¹²⁾から、PSI Machine¹³⁾ 上の実証ソフトウェアのひとつとして、「数式処理システム」の開発を受託したことであった。現在、商用数式処理システムとして知られている Maple や Mathematica などの現代的システムは、発表されたばかりであり、日本ではほとんど知られていない時期であった。それまでは、理化学研究所(当時)の後藤先生¹⁴⁾ が FLATS という数式処理専用マシンを開発し、その上に Reduce¹⁵⁾を走らせて、高精度の電子線リソグラフィー用の電子レンズの設計に成功したというように、数式処理といえば殆んどの場合 Reduce が利用されていた。この頃までの著名な数式処理システムは、記号処理の容易さから Lisp で作られるものがほとんどであり、Reduce も Lisp 上に作成されていた。理化学研究所では、佐々木博士¹⁶⁾が GAL(General Algebraic Laboratory)をやはり Lisp の上で作成していた。

筆者らは、システム開発の先輩として理化学研究所に佐々木博士を何度か訪ね、今後重要になる数式処理の分野は何か、システムを開発していくに当りどのような機能を目指するのがよいかなど教えを受けた。

筆者は大学ではロボットの研究をしていたが、ロボットの機構と制御系を記述する方程式はロボットの自由度(主として関節の個数)が多くなると、手計算にはとても耐えられないほど大きくなり、その導出(と検算)はいつも苦労していた。そして、この計算に計算機が使えないものかと常々考えていた。IBM には数式が記号のまま計算できる PL/I FORMAC というプログラムがあると聞き、試用してみた。しかし、FORMAC を使うことができるマシンは大型の計算機であり、個人が自由に使えるようなものではなかった。

筆者は当初「記号処理」の方に興味があった。しかし、この仕事を始めるに当たって新たにメンバーとなった、横山、野呂の両名は数学の研究者であった。当時の北川 敏男 国際研会長から言われた言葉は、「今度、ICOT の仕事をするにあたって 2 人を配属する。但し、この 2 名は数式処理に必要な数学については十分な力を持っているが、純粹の数学の学徒であるから、君のように計算機だ、記号処理だのということはまったく知らない。彼らの力と資質とを損なわないよう

¹²⁾(財) 新世代コンピュータ技術開発機構。第五世代コンピュータの開発母体。

¹³⁾Personal Sequential Inference Machine (= パーソナル逐次型推論機械。) ICOT の最終目的としたハードウェアは PIM (Parallel Inference Machine = 並列型推論機械) であったが、この時期 (ICOT 中期) の実証ソフトウェアは PSI 上に試作する計画になっていた。

¹⁴⁾後藤英一。東京大学名誉教授。数式処理学会名誉会員。

¹⁵⁾Rand Corp. の A. C. Hearn 博士が開発。世界中を巡って普及に努められた。

¹⁶⁾佐々木 建昭。現 筑波大学教授。

に、少なくとも半年は計算機には触らせないように!」というものであった。

筆者はこの会長命令を忠実に守り、当座は数式処理に関連する数学の学習を課題として2名に毎週セミナーをさせる計画を立てた。横山は因数分解とGCD、野呂はRischの不定積分とグレブナ基底、という分担にした¹⁷⁾。因数分解については、横山が古典的教科書から当時最新の論文までを探し求めて、Berlekampに始まる有限体の因数分解から始め、片端から読破し、セミナーも熱心に実施していった。一方、野呂はグレブナ基底についてBuchberger¹⁸⁾の論文をセミナーした。

当時、筆者は沼津愛鷹山の中腹にあった国際研から、東京大田区蒲田の国際研分室に毎週2日通って、横山、野呂とともに関連する数学を学習した¹⁹⁾。因数分解に関して、有限体や代数的拡大体、Risch 算法に関して代数函数体、超越拡大などのテクニカルタームに関して両名からの説明を聞いた。

工学系出身で数式処理の発展を願う者としては、現在の数学科以外での理工学系の高等教育は「解析」の学習に偏重しすぎていると言わざるを得ない。代数の基本的な概念である、群、環、体、モジュールなどが数学を除く理工学部の授業には採用されていないのが残念ながら現状である。理工学の応用では数値シミュレーションが欠かせないが、そのために必要な数学的背景知識は解析の知識であることがその理由であろう²⁰⁾。

しかし、このことは「数式処理に何ができ、なにができないか」について肝要なところでの理解を妨げ、個人レベルで言えば、「数式処理システム」を効果的に利用する上での障壁となり、社会レベルで言えば、「数式処理」がテクノロジーとして受け入れられるための大きな障壁となっているように思われる²¹⁾。

5 数式処理システム Risa/Asir

5.1 日本の数式処理システム開発

わが国は数式処理システム開発では後進国である。その中で、Risa/Asir は現在も活発に開発が進行している国産の汎用数式処理システム²²⁾である。特定分野用途としては、kan²³⁾がある

¹⁷⁾当時、ICOT の希望として、初等関数の不定積分機能を実現する数式処理システムを論理形言語 ESP で作成することで、契約がまとまりつつあった。グレブナ基底は理研の佐々木博士も今後の重要技術と言っていたことを勘案し、学習対象としていた。

¹⁸⁾Bruno Buchberger, 記号計算研究所 RISC-Linz の創立者で前所長。それまで算法は存在しないと考えられていたグレブナ基底の計算法 (Buchberger 算法と呼ばれる) を考案。Berlekamp-Zassenhaus の因数分解算法、Risch-Norman の不定積分算法と並んで数式処理の3大基本算法と呼ばれる。

¹⁹⁾この他、ICOT に納品するソフト作成に必要な背景知識を共有するため、富士通 SSL から2名の方にも参加していただいていた。

²⁰⁾電子工学で講義があった符号理論は特殊な例外である。

²¹⁾数式処理システム (特に商用) では、ユーザの当座の要望をみたすために、敢えて限定された状況にしか対応できない処理を提供していることがある。そのような adhoc な処理はアルゴリズムが確立されていないか、よくあることだが、アルゴリズムがそもそも存在しない場合に処方されるため、無限定に使用すれば期待外れの結果を、時には数学的な誤りをも、生むことになり利用者から非難を受ける。反対に、確実にできることしか提供しない場合には、機能不足として軽んじられる。このような状況は数式処理にとって大変残念なことである。Risa/Asir はこの後者のような保守的な態度で開発されて来た。

²²⁾GAL の開発は現時点では活発とは言えない。1970年代には NTT 横須賀通信研究所で AL (Algebraic Language)[9] が完成されていたが、一般への公開は実施されなかった。また、1986年頃には、愛媛大学 野田研究室で Prolog をベースにした小型数式処理システム Sync[16] が試作されている。

[19]. kan は現在では Risa/Asir と同じく OpneXM 開発の一環として開発が継続されている.

前節冒頭で述べたとおり, 1985 年当時, 人工知能 (AI), 知識工学などのソフトウェアは殆んどが記号処理言語 Lisp で作成されていた. 著名な数式処理システムも同様であった. この Lisp の伝統に対し, 第五世代コンピュータでは, 人工知能の研究開発に適した Prolog という記号処理言語をベースにした ESP (Extended Self-contained Prolog) を開発言語としていた. そして, 古い時代の AI のひとつの成功例である「数式処理—古い酒」を「第五世代コンピュータ—新しい皮袋」に詰め替え, Prolog(あるいは ESP) による実用的ソフトウェアの開発の実証例のひとつとしたい, というのが第五世代コンピュータ側の希望であった. しかし, 当時の Prolog 処理系が Lisp の処理系ほど効率化が進んでいなかったせいもあるだろうが, ICOT 以外の数式処理研究者の目は Prolog に対してまったく冷やかであった.

このような状況と並行して当時の「数式処理」の潮流は, 単に記号を処理するという意味での「数式処理 (formula manipulation)」から離れ, 数式の代数的構造を利用して処理の効率を上げ, 素朴な教科書的/原理的方法では計算に困難が伴うより高度な代数的処理を可能にして, 実用的問題の解決に資することと, その処理能力をさらなる数学 (代数) の研究に活用するという「計算機代数 (computer algebra)」へと変化しつつあった. つまり, 当時の世界的動向から見れば, 「数式処理」は人知を真似る AI の対象ではなくなってきており, また, 記号的処理の比重の相対的低下から, 実現のためのプラットフォームが Lisp であるか Prolog であるかはもはや問題ではなくなっていた. はっきり言えば, 「Lisp も Prolog も不要である. 他のソフトウェアとの親和性と移植性を考えれば, C のようなどんなプラットフォームでも効率的な処理系が提供されるシステム記述言語で開発するべきである .」というのが, 筆者等の認識であった²⁴⁾.

「数式処理」=「記号処理」 \subset 「人工知能」という図式は一般の人々のあいだに相当長い期間²⁵⁾生きていた. 「実用規模の数式処理のほとんどの計算時間は, 記号 (と) 構造の処理にではなく, 数値 (整数) の計算に費やされている. 数値 (大規模な整数) の高速処理こそ数式処理の根源的課題のひとつである²⁶⁾ .」という事実への理解は少ないようである. 1997 年頃, 私共の上司のひとりが「数式処理は (Prolog や Lisp で作るエキスパートシステムのような) 記号処理ではなくて, (数値計算にむしろ近い普通の) 数理科学計算ソフトウェアなんだね .」と言ったときにはむしろ筆者等のほうが驚いた.

5.2 ICOT での数式処理システム開発

前述のような時代背景を筆者らは認識していたが, ICOT での仕事としては論理型言語²⁷⁾ とりわけ PSI 上で動作する世界初の本格的「数式処理システム」の開発を目指した.

目標とする機能は初等関数の不定積分が可能なことと決っていたので, そのために不可欠な

²³⁾kan/sm1. 1994 年, 神戸大学 高山教授. 代数解析のための数式処理システム. 非可換/可換環の数学計算用で OpenXM プロトコルにより Risa/Asir との相互接続が可能.

²⁴⁾当時リリースが始まって間もない Maple や Mathematica など第 3 世代の商用数式処理システムは C で書かれている.

²⁵⁾少なくとも 1990 年代中は.

²⁶⁾もちろん, 多項式などのデータ構造の処理も大規模になればなるほど重要になる.

²⁷⁾Prolog に代表される定理証明系をプログラムの操作意味論とする計算機言語. ICOT の ESP は Prolog を拡張し, オブジェクト指向を取り入れた論理型言語である.

下位機能として、多変数多項式の整数上での因数分解と GCD 計算、1 変数多項式の代数的拡大体上での因数分解と GCD 計算、最下位機能として任意多倍長整数の計算などの開発目標を立てた。最初の一年間は算法の調査に掛かりっきりで、システムの試作はほとんどできなかった。わずかに、今は懐かしい FM11 の OS9-BASIC で、任意多倍長整数計算ルーチンの習作(野呂)ができたくらいで、計算機パワーの豊富な今日からは想像もできないような貧困な計算機環境で、因数分解、不定積分、グレブナ基底などについての欧米の理論成果のキャッチアップとプログラミング技術の習得に努めていた。沼津国際研との交流の一助にと始めた「シスラボ通信」なる部内紙に、筆者はリーダーとしての学習の理解度を示すために「楽しい因数分解」なる連載記事を書いた(横山監修)。これには、Berlekamp/Zassenhaus のアルゴリズムが脚色されて記述されており、そのアルゴリズムを知っている人なら補って読める。もっとも、次第に忙しく余裕がなくなったためもあり、「シスラボ通信」は 2 号が発行されたのち廃刊となってしまった。

この PSI-II 上の数式処理システム SAM は 1989 年 3 月に完成した [18]。このシステムは、Risch 算法による初等関数の不定積分が可能なシステムで、それ自体は Reduce や Maple にも実現されており²⁸⁾、珍しいものではなかったが、当時実現しているシステムがあまりない、代数拡大体上の因数分解機能を持っていた点がユニークといえる。

5.3 Risa/Asir の開発

ICOT への納品が完了すると、富士通の数式処理グループは SUN や DOS/V マシンのような一般的なプラットフォーム上で独自に数式処理システムの開発を始めることになった。新しく始めるにあたっては、あまり実用性のない、初等関数の不定積分などは避け、代数計算の基本に戻って、重点を多項式の効率的処理に置くことにした。新しい機能や新しい効率的の算法を実現するために、データ構造を含め独自のものを新たに開発することになった。

システムが次第に大きくなり、また経験を積むにつれて、開発の初期には予見できなかったシステム上のいろいろな部分の整合性が問題になってきた。新しい発見や理論成果を取り込んだり、性能や作成しやすさの向上のためにも、システム構成を整理したほうが良いと思われるようになってくるからである。ICOT の受託終了はひとつの契機であったが、公開までには 2 度ほど大幅な見直しを経験している。

また、ICOT に納入した数式処理システム SAM の言語インターフェースは Prolog 風のものを作成していたが、新しく作成される数式処理エンジンのために C 言語風の言語インターフェースの作成も始めた。この新しい数式処理のエンジンとその言語インターフェースが Risa と Asir と呼ばれるようになるのは、1 年後の 1990 年になってからである。

Risa の言語インターフェース Asir の第 0 版は 1990 年 9 月に完成した [17]。その時点ですでに Asir に dbx 風のデバッグが組み込まれていたことは、試行錯誤しながら算法を完成させていくことの多い数式処理の研究開発者自身の切実な要請からであった。その後、開発者の所属した国際情報社会科学研究所の富士通研究所への組織移管、「情報社会科学研究所」へと名称の変更、さらに「情報社会科学研究所」廃止(1996 年 11 月)と、組織上の変遷があったが、開発者

²⁸⁾Mathematica の不定積分は、Risch 算法によるものではなく、パターンマッチングに基づくヒューリスティックな方法を採用していた。

の竹島, 横山, 野呂の 3 名は, 富士通研究所にて高性能数値計算グループとして「数式処理 (計算機代数)」とその応用の研究開発を続けた。

1989 年は, Risa/Asir としての数式処理システム開発の実質的な初年である。それまで Prolog 向けに作成していたデータ構造などは捨て, 改めて有理係数多項式の処理を主目的とするデータ構造を再定義した。その上で, 四則演算, GCD, 無平方分解をインプリメントした。この時点では GC (Garbage Collection) 機能は未実装で, メモリ管理は C の `alloc()`, `free()` で直接コーディングされていた。そのため, コード量が増加するに従って開発には困難を来すようになった。1989 年末頃 Boehm-Weiser による conservative garbage collector を採用することでこの問題は解決した。現在にいたるまで Risa/Asir では Boehm-Weiser GC が採用されている。

また, この年の 9 月には筑波大学の井田 哲雄教授の紹介を得て横山が RISC-Linz を 1 ヶ月訪問した。この訪問により, ヨーロッパでの数式処理の先端研究について多くの情報や研究者との繋がりが得られた。これが契機となり, RISC-Linz (とりわけ Buchberger 所長²⁹⁾) との密接な研究協力関係が築かれることとなり, そのことは富士通の数式処理研究の大きな推進力となった。

1990 年には, 多変数の無平方分解に Wang-Trager アルゴリズムを採用して高速化し, さらに, 多変数因数分解, GCD についても EEZ 法のアルゴリズムの一部を EZ 法に採用して, EEZ でなくても EZ 法で十分な高速化が達成できた。また, コマンド言語がプログラミング可能な形に整えられ, Asir 言語となった。

1991 年には浮動小数点数がサポートされ, 同時に陰関数描画アルゴリズム [8, 13] がインプリメントされた。これは, TCP/IP プロトコルで Risa/Asir の外部にある描画プロセスを呼び出すもので, 分散計算の Risa/Asir への最初の実装である。なお, 2000 年からは分散計算は OpenXM プロトコルで実装されるようになった。

1992 年には, それまで Risa/Asir になかった BigFloat (多倍長浮動小数点数) の演算を PARI ライブラリをリンクすることによって実現した。これによって, 多くの超越関数の BigFloat 計算 (BigFloat 複素数計算を含む) が Asir プログラムから呼び出して使用できるようになった。このころから, グレブナー基底計算パッケージの開発に着手し, その演算に適するよう分散表現多項式が Risa/Asir のデータオブジェクトに加えられた。この時点以前では, 640k DOS で動作する Petit-Asir [10] 以外は, もっぱら Unix ワークステーションのみがサポートプラットフォームであったが, Macintosh を含むパソコンへの移植にも着手した。

1993 年にはグレブナー基底計算の最初の版が実装完了し, 当時のデータでは世界最高速を記録していた。また DOS 版/ワークステーション版を問わず様々なマシンへの移植が進んだ。

1994 年 6 月 1 日に Risa/Asir はそのパイナリ (V940420) の公開をネットワークニュースグループ `sci.math.symbolic`, `sci.math` に宣言し, ノンプロフィットの利用に関しては無償で自由に使って貰えるようにした。このことで, Risa/Asir は国産初の公開された数式処理システムとなった。開発者自身, 富士通の英断に感謝している。この時点では動作するプラットフォームは Unix 系が主であったが, MSDOS 環境では DOSExtender (`exe386`, `go32`) を使用することによって動作する dos 版が, また Macintosh で動作する Mac 版も提供された。

²⁹⁾Buchberger 所長は 初期の Asir Manual 英文版の校正をしたことで, Risa/Asir の開発に直接貢献している。

その後も、当方が使用可能な限りのハード/OS に移植作業が継続されたが、Windows への移植は要望がありながら容易には実現できなかった。

1995年11月14日にはグレブナ基底計算関係の機能性能が大幅に強化され、分散計算機能が拡充された新版(V950831)を公開した。同年秋の第1回のRisa Consortium ワークショップに参加したユーザにWindows版(3.1, NT, 95, V950831相当)Risa/AsirのCDが配布された。これは少し遅れて一般公開された。

1998年には、Windows版のインストラ CD付きの単行本[14]がSEG出版より出版された。これは表紙タイトルの内「日本で生まれた数式処理ソフト」の部分が大きな文字で書かれており、注目を引いたらしく、出版以後Risa/Asirへの問い合わせや、バイナリへのftpアクセスも多くなった。また、この書籍の序文では、桂先生³⁰⁾がRisa/Asirを「日本が誇るべきソフト」と紹介して下さったこともRisa/Asir普及の大きな要因となった。

2000年には、Risa/Asirに高性能の因数分解機能(代数拡大体上を含む)やグレブナ基底計算機能があったため、暗号の研究開発³¹⁾が短期間で進み、会社に対する貢献として認められた。

暗号応用が一区切りとなった後、野呂、横山が2000年9月、2000年12月にそれぞれ大学に転出し、Risa/Asirの開発は野呂の転出先である神戸大学に本拠を移した。現在は神戸大学高山教授が主催するOpenXM Committers³²⁾という組織の中で野呂、齋藤を中心に開発が続けられている(竹島も参加している)。

2000年9月に野呂が神戸大学に転出する際に、Risa/Asirのソースも公開され³³⁾、一般の開発者が協力できるオープンソース型の開発体制に移行した。この体制によりWindows版、Unix版ともほとんど対等な機能性能が維持されるようになった。

5.4 Risa Consortium/Risa Conference

1995年6月6日にはRisaの初期ユーザによってRisa Consortiumが設立された。代表は愛媛大学野田教授³⁴⁾、幹事は神戸大学高橋助教授³⁵⁾と上智大学齋藤助手³⁶⁾が務めた。同年9月12日~14日には、神戸大学滝川記念館で88名の参加者を得て、第1回Risa Consortium ワークショップ(RisaCon)が開催された。この参加者に対してWindows版が初めて一般配布された。1996年には、愛媛大学工学部(第2回、1996年3月)、富士通沼津工場 富士フォーラム(第3回1996年8月)、東北科学技術短期大学(第4回1996年10月)と3度のワークショップが開催された。その後第5回(1997年)からは、第7回のワークショップが城西大学(1998年11月)

³⁰⁾桂重俊。東北大学名誉教授。数式処理学会名誉会員。グレブナー基底の標準ベンチマーク問題であるKatsura- n 方程式の提出者。先生は方程式をパラメータ $n = \infty$ において解いたことを業績としたい旨表明されているが、数式処理、グレブナー基底研究者にはKatsura- n の作者として知られる。

³¹⁾楢田曲線暗号研究の副産物として、整数論の研究で使用されるモジュラー多項式 $\Phi_p(x, y)$ が113以下のすべて(30個)の素数 p について得られた。数学研究上有用なデータであると判断し、富士通研究所のホームページに公開した。<http://www.labs.fujitsu.com/jp/freesoft/modularpoly/>

³²⁾<http://www.openxm.org/>

³³⁾公開時点までの著作権は富士通が保持している。公開後の寄与に関してはOpenXM Committersの各々に著作権がある。

³⁴⁾野田松太郎。愛媛大学名誉教授。

³⁵⁾高橋正。現神戸大学発達科学部教授。

³⁶⁾齋藤友克。現(株)アルファオメガ代表取締役社長。

で開催された以外は、毎年 3 月に愛媛大学工学部で定期的で開催されるようになり、第 10 回愛媛大学工学部 (2002 年) まで回を重ねた。その後幹事役を神戸大学高山教授が引き継ぎ、名称を Risa/Asir Conference と改めて神戸大学で毎年開催されることとなった。なお、第 5 回および第 6 回ワークショップの研究発表は城西大学紀要として出版されている。

このワークショップは当初より、Risa に限らず数式処理に関わる話題全般について、自由に知見や意見を発表/交換することができる、数式処理ユーザの交流の場として提供されており、この精神は Risa/Asir Conference にも引き継がれている。

5.5 Risa/Asir の特徴

Risa の特徴は、因数分解 (整数上、代数拡大体上)、最大公約多項式計算、グレブナ基底計算などの多項式演算の高速性、ユニークな陰関数の描画機能、Big Float の計算に Pari システムを結合していることなどである。

ユーザにとって機能不足を感じる点としては、多項式以外の数式 ($\log x$, $\sin x$ などの超越関数や $f(x, y)$ のような不定の関数) に対する演算機能が少なく、数式の簡約化機能やパターンマッチングによる変形をサポートしていないこと、陰関数のグラフ描画ができる以外はグラフィックスが貧弱なことなどがある。また、不定積分が有理関数の不定積分しかサポートしていない。これらの点は、現在の Risa が多項式を中心としたデータ構造を採用しており、一般の数式に対応するだけのフレキシブルさを持たないことが大きな原因である。この最後の点に関しては、Asir への入力テキストの parse tree を Asir 自身のデータとすることができるような言語メカニズム (Lisp にあるような quote 関数を用いて関数の evaluation を停止する機能) を導入し、それをベースに項書換えシステムなども取り入れようとする計画が、高山教授のイニシアティブの下に進行中である。

5.6 グレブナー基底

Risa のグレブナ基底パッケージについて、少々付け加えておきたい。1991 年に数式処理グループに加わった下山武司³⁷⁾が 1992 年に多項式のグレブナ基底計算を Asir で書き、野呂が下位部品を C でコーディングしたところ、当時でおそらく世界最高速といえるグレブナ基底計算の実装ができた。これ以来、Risa にインプリメントされたグレブナ基底計算パッケージは、自己記録を更新しつつ常に世界最高速を誇っていた。

ところが 1997 年に、パリ第 6 大学の J-C.Faugere 博士のグレブナ基底専用プログラムが驚異的な高速度を達成したとの報告が届いた。ベンチマークは Faugere 博士のホームページ (<http://posso.lip6.fr/jcf/>) に公開されていたが、算法が公表されていなかったためどのような方法を用いたのか確認できないでいた。その後、これは Buchberger 算法とは異なる方法によるグレブナー基底 (0-dimensional radical) の新しい計算法³⁸⁾ であり、確かに高速に計算できると確認され、Risa/Asir にも実装されている (関数 `dp_f4_main` 他)。

1996 年には、Risa のグレブナ基底計算の実力を示す良い機会があった。前年にネットニュース

³⁷⁾1997 年より暗号研究に専念。

³⁸⁾F4 アルゴリズムと呼ばれている。

投稿した「Risa を応用してあなたの問題を解決してみませんか？」との呼びかけに応じて McKay 教授³⁹⁾ が持って来た問題は、当時としては、極端に大きな問題であった。それは、replicable functions of odd level をすべて決定するという数学の問題で、見掛けは 12 個の変数についての無限個の多項式制約条件を解くことであったが、McKay 教授と野呂の議論を経て、最終的には 4 変数、20 本の方程式を解くことに帰着された。方程式を構成する多項式の次数は 7~17 次、項数 64~1183、係数の大きさ 10 進 10 桁程度であり、Risa でも解けるかどうか分からなかった。計算結果のグレブナ基底 (全次数逆辞書式順序) は、51 本の多項式、次数 5~10、項数 59~94、係数の大きさ 10 進 50 桁~100 桁となり、このグレブナ基底に対して素イデアル分解 [7] を適用することによって、最終的な連立方程式の解として全部で 72 個の解を得た。これにより replicable functions of odd level は 72 通りあると決定することができた。この 72 通り (すべて有理数) は既に別の方法によって発見されてはいたが、代数拡大体上に (有理数以外の) 他の解があるかどうかは未確認であった。この 72 個の有理解以外に (複素数の範囲で捜しても) 解がないことは Risa の計算によって初めて確認された。最初の計算は Ultra Sparc 170MHz を用い、所要メモリは 460MB、所要時間は 24.5 日であったが、その後のグレブナ基底計算の改良⁴⁰⁾により P6-200MHz で約 9.5 日、所要メモリ 50MB で済むようになった [5]。

グレブナ基底は実にさまざまな応用が可能⁴¹⁾で、研究者/技術者への普及も進んだため、最近 (2004 年) では Mathematica や Maple などの商用システムでの実装も相当強力になっている。そのため代数方程式に対して気軽に使えるようになってきている⁴²⁾。

姫路工業大学の関口博士⁴³⁾の著書、「多面体の数理とグラフィックス」[15]にはグレブナ基底の面白い応用が紹介されている。そこでは Risa と Reduce, Mathematica を使って、Zalgaller 多面体の類似物を作りだしグラフィックスとして見せている。この作業に、複数の数式処理システムを利用したことについて、関口博士はつぎのように述べている。「数式処理システムにはそれぞれの特性がある。Asir には強力なグレブナー基底の計算プログラムが内蔵されており、Mathematica のグラフィックス機能は大変便利である、といったように。便利な機能を使おうとしたらこのようになってしまった、というのが実情である。」関口博士の姿勢は明確である。自分の仕事にとって最善のものがあれば躊躇なく利用して成果を得るという姿勢である。このように苦勞を厭わず異種システムを併用する必要があるユーザのためにも、異種数学システム間のインターフェースの標準化を考え、実験を進めていたが、今では、Risa/Asir を高山教授の提唱する OpenXM プロジェクトの一環として開発することにより、結実しつつある。

このほか Risa/Asir では、グレブナ基底計算を利用して、準素イデアル分解や素イデアル分解 [7]、代数拡大体上の因数分解を利用した Galois 群の具体的計算 [2]、Kan-sm1 との接続による

³⁹⁾John McKay, Concordia Univ. Canada.

⁴⁰⁾頂の指数ベクトルに対して適切に選んだ重み付けで項順序を決めることにより、さらに高速に計算される。計算機環境は不詳であるが、木村の報告 [12]によれば、2003 年 12 月時点で 2931 秒で計算できたとする。

⁴¹⁾余談であるが、現在実施されているほとんどの応用は Buchberger の初期の論文で指摘されているといわれている。

⁴²⁾「Risa には線形方程式を解く関数はないのか？」とよく質問を受けるが、「線形方程式も代数方程式の一種なので、グレブナ基底を使って下さい。」ということにしている。ただし、グレブナ基底の中の注目する 1 変数 (1 次) 多項式 $ax + b$ から、その零点 $-b/a$ をとり出すことは、Risa/Asir ではユーザの作業となる。

⁴³⁾関口次郎。現東京電気通信大学教授。

b-function の計算 [6], といった数学への応用で 1990 年代の数式処理の世界をリードしていた.

5.7 実代数処理—実世界問題へのアプローチ

筆者は数学ばかりでなく, より広く数式処理の新しい応用が拓けることを願っている. 工学では扱う変量の取る値は実数であることがほとんどであり, 扱う系を記述するには等式ばかりでなく不等式も現われる. 数学の教育では応用が見える形での数学概念の導入が効果的と言われるが, 応用先である工学, 経済学, 生物学などで多く現われる数量は実数であり, 実数が適切に扱えるかどうかは, 数式処理システムにとっても重要な問題である.

グレブナ基底で扱える範囲は等式の制約⁴⁴⁾であり, その解は複素数上で考えるため, 不等式を含む場合や, 変数の実数性を直接に扱うことができない. 実数上の問題を扱う方法として, QE(quantifier elimination) という理論がここ数年の間に実用化されて来た.

数式処理グループのひとり穴井は, 1997 年に特殊ケースの QE アルゴリズムのひとつを Risa にインプリメントした. この仕事は穴井と屋並による Maple 上の実代数処理系 SyNRAC [1] に引き継がれ, 種々の QE 手法が使えるプラットフォームとして整備されつつある. また, ロバスト最適設計への応用ツールや生体反応系の知見発見ツールなどへの応用も開拓されつつある. また, 前述したように教育への数式処理の導入を考えた場合にも, QE が効果的に活用できる可能性は大きい.

QE については, 数値と数式の融合計算などの新しい研究成果を取り入れ, 効率を改善していくことによって, 最適化問題をはじめとする種々の新しい工学応用とともに, 教育への応用も拓けていくものと確信している.

6 結語

筆者がこの分野に興味を持ち始めたころから 20 年が過ぎた. 数式処理は, 数学研究のための有用なツールとなったばかりでなく, ビジュアルな GUI とともに, 表計算, プレゼンテーションツールなどのデスクトップユーティリティの中で, 数値計算やグラフィックス, ビジュアルライザー, データベースと互いに連携することにより, 教育やエンジニアリングにおいて手軽に使えるツールとなって来ている. このことは IT の目覚ましい発展の典型例として記憶されることになる.

数式処理のさらに新しい可能性を拓くには, 古くから「数値数式融合」というキーワードで指摘されているとおり, 「計算の質の確保」と「計算量の壁を越えること」との両立を目指す必要がある. この目的は, 正確ではあるが計算量の大きい数式処理に, 数値計算の高速性を利用しようという所にある. 「数値数式融合」には別の側面もあることが QE の応用を試みている中で見いだされた. それは, 情報量不足で数値計算が適用できない最適化問題などに, QE を利用してコンサーバティブではあるが有意の解を与えることができるという例である.

また, 教育への応用を拡大するためには, 教材を作成する側にとってアプリケーションのプログラムが容易に書けるような, 洗練されたユーザインタフェースを持った開発環境も必要にな

⁴⁴⁾多項式 P で表されるある量が 0 でないという条件 ($P \neq 0$ で表される) は, いわゆるサチュレーション手法により, 新しい不定元 τ と多項式 $\tau P - 1$ を追加することによって ($\tau P - 1 = 0$ としたことに相当), グレブナ基底計算の枠組みに取り込める.

る．また，与えられた教材を学生/生徒が効果的に利用できるようにするには，柔軟な式変形をサポートすることも重要な要素である．

Risa/Asir は，前者（数値数式融合）についてはグレブナ基底や QE を手掛りに発展させることができる．また後者（教育への応用）については，Asir 言語とその処理系への機能追加と OpenXM のような異種システム連携が必要である．

謝辞

最後になったが，多くの協力者の方々のこれまでのご支援に感謝の言葉を捧げたい．Risa Consortium の野田代表，高橋，齋藤の両幹事をはじめとする多くの方々には Risa の普及ばかりでなく，研究上も多くの助言，励ましをいただいた．それらは Risa/Asir の研究開発を続ける上で大きな力となった．富士通の上司同僚にも感謝を申し述べたい．企業の中で 20 年にもわたって基礎的な研究が継続でき，オープンソース化まで許していただいたことは Risa が世に広まり発展した最大の要因であった．おかげで富士通は日本の数式処理の発展に大きな役割を果たすことができた．研究の初期に励まして下さった初代国際情報社会科学研究所 北川所長と第 3 代 榎本所長⁴⁵⁾，ICOT から離れ独自に研究をすることを認めて下さった小口文一所長，Risa の公開に尽力して下さった佐藤所長⁴⁶⁾ と戸田所長⁴⁷⁾ の理解と支援の賜である．最後にもう一度，Risa に関わったすべての関係者に感謝する．

参考文献

- [1] Anai, H., Yanami, H., SyNRAC: a Maplepackage for solving real alge-braic constraints. *Presented at International Workshop on Computer Algebra Systems and their Applications (CASA), Proc. ICCS 2003, LNCS, 2657*, 828-837, Springer-Verlag, 2003.
- [2] Anai, H., Noro, M., and Yokoyama, K.:Computation of the splitting fields and the Galois groups of polynomials, *Progress in Mathematics*, **143**, 29-50, Birkhäuser, 1996.
- [3] Becker, T., Weispfenning, V. :Gröbner Bases, Springer-Verlag, 1993
- [4] Noro, M., Takeshima, T.: Risa/Asir—A Computer Algebra System, *Proc. ISSAC92*, 387-396, ACM Press, 1992.
- [5] Noro, M., McKay J. : Computation of replicable functions on Risa/Asir, *Proc. PASC0'97*, ACM Press, 1997.
- [6] Oaku, T.:Algorithms for b -functions, restrictions, and algebraic local cohomology groups of D -modules, *Advances in Applied Mathematics*, **19**, 61–105, 1997.
- [7] Shimoyama, T. and Yokoyama, K.:Localization and primary decomposition of polynomial ideals, *J. Symbolic Computation*, **22**, 247-277, Accademic Press, 1996.
- [8] Takeshima T., Noro M. and Saito T. : Graphic Drawing Apparatus for Generating Graphics of Implicit Functions, U.S.Patent No.5590255, 1996.

⁴⁵⁾榎本 肇，東京工業大学名誉教授．

⁴⁶⁾佐藤 繁，元富士通研究所 社長

⁴⁷⁾戸田 光彦，現 新潟大学教授

- [9] 池原悟, 岡田博: 数式処理言語 AL とその処理方式, 情報処理論文, **20**, 2, 158-165, 1979.
- [10] 加藤昭彦, 野呂 正行, 竹島卓: 数式処理システム risa のパーソナルコンピュータへの移植について, 日本数式処理学会 第 1 回大会予稿, 数式処理, **1**, 2, 57-60, 1992.
- [11] 加藤昭彦, 野呂正行, 竹島卓: 数式処理システム Risa/Asir におけるリスト処理, 高階関数処理ライブラリの作成, 日本数式処理学会第 2 回大会 予稿 (1993 年 5 月), 数式処理, **2**, 2, 48-51, 1993.
- [12] 木村 欣司, 野呂 正行: グレブナー基底計算のための weight 生成アルゴリズム, 数理解析研究所 講究録, **1395**, 1-7, 2004.
- [13] 齋藤友克, 近藤祐史, 三好善彦, 竹島卓: 2 変数代数曲線の忠実な描画, 情報処理学会論文誌, **41**, 4, 1009-1017, 2000.
- [14] 齋藤 友克, 竹島 卓, 平野 照比古: RISA/ASIR, 日本で生まれた数式処理ソフト, リサアジールガイドブック, SEG 出版, 1998.
- [15] 関口 次郎: 多面体の数理とグラフィックス, 牧野書店, 1996.
- [16] 野田 松太郎, 岩下 英俊: パーソナルなハイブリッド処理システム SYNC の設計, 情報処理学会論文誌, **30**, 4, 419-426, 1989.
- [17] 野呂正行, 竹島卓: 数式処理システム risa の C-like ユーザ言語 ASIR と dbx-like debugger, 日本ソフトウェア科学会数式処理研究会 予稿, ラフォーレ修善寺, 1990 年 10 月.
- [18] 竹島 卓, 野呂 正行, 須永 知之, 井深 克憲, 塚元 有子: PSI 上の数式処理システム SAM, 情報処理学会第 39 回全国大会予稿集, 118-118, 1989.
- [19] <http://www.math.s.kobe-u.ac.jp/KAN/index.html>